

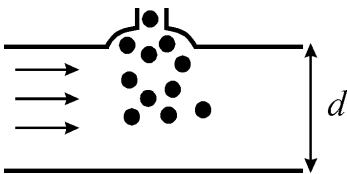
ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

Усякий впорядкований рух електричних зарядів ми називаємо **електричним струмом**. Ці заряди у вченні про струми називають **носіями струму**. В металах і напівпровідниках носіями струму є вільні електрони, у провідних розчинах – позитивні і негативні іони, у іонізованих газах – і електрони, і іони.

Лінії, вздовж яких рухаються носії струму, називають **лініями струму**. Дотична до лінії струму співпадає за напрямком зі швидкістю руху заряду в заданій точці. Іноді із ліній струму утворюють трубки струму. Властивість цих трубок – під час свого руху заряди не перетинають поверхню трубок, утворену лініями струму. Провідник – різновид струму, за його межі струм не виходить, хоч це теоретична ілюзія. Візьміть пальцем за оголений провідник...

Досліди Міллікена по визначенню заряду електрона

Розглядаючи протікання електричного струму через вакуум, рідини та тверді тіла ми маємо на увазі наявність мінімальної неподільної кількості електрики, яка приймає участь в переносі струму – заряд електрона. Тому принципове значення мають досліди з визначення цієї величини, поставлені Робертом Міллікеном в 1910-1913 роках. Ідея цих експериментів зводилася до наступного : будь-яке тіло може змінювати свій заряд тільки порціями, кратними заряду електрона e_0 . Точно вимірявши заряд тіла та його зміни в результаті яких-небудь впливів, ми одержимо величини, які дорівнюють цілому числу e_0 . Треба таким чином знайти число, на яке ділиться і заряд тіла, і величина зміни заряду.



В досліді Міллікена всередину плаского конденсатору, пластини якого були розташовані горизонтально, вводилися за допомогою пульверизатору крапельки масла. Введення здійснювалося через отвір у верхній пластині.

За рухом крапель можна було спостерігати у мікроскоп, тубус якого був розташований горизонтально.

При незарядженому конденсаторі краплі рухалися в полі сили тяжіння. На них діяли наступні сили :

сила тяжіння $mg = \frac{4\pi}{3} \rho \cdot a^3$, де ρ – густина масла, a – радіус крапельки;

підйомна сила повітря $mg = \frac{4\pi}{3} \rho_n \cdot a^3$ (ρ_n – густина повітря);

сила тертя $6\pi\eta av_g$ (формула Стокса), де η – коефіцієнт в'язкості повітря, v_g – швидкість падіння краплі.

Тоді

$$\frac{4\pi}{3}(\rho - \rho_n) \cdot a^3 = 6\pi\eta av_g.$$

Величину v_g можна було визначити експериментально, вимірюючи час падіння краплі між двома лініями в полі зору мікроскопа, відстань між якими заздалегідь відома. Звідси можна знайти радіус краплі

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\eta v_g}{(\rho - \rho_n)}}.$$

Якщо крапля має заряд q , а на конденсатор подана різниця потенціалів U такої полярності, щоб підняти заряджену краплю вгору, то поле $E = \frac{U}{d}$, а крапля рухається вгору зі швидкістю v_E , то рівнодіюча сил виглядає як

$$qE - mg = 6\pi\eta a v_E.$$

Але $mg = 6\pi\eta a v_g$ (з урахуванням підйомної сили повітря), тому

$$q = \frac{6\pi\eta a}{E} (v_E + v_g).$$

Швидкість v_E визначається за допомогою мікроскопу таким же чином, що і v_g . Так можна визначити заряд краплі q .

Між пластинами пропускався пучок рентгенівських променів. В результаті в повітрі виникали іони, які могли осідати на крапельках та змінювати їх заряд. Крім цього, рентгенівські промені могли вибивати фотоелектрони з поверхні крапель. В результаті заряд крапель час від часу змінювався, що приводило до зміни швидкості їх руху v_E . Очевидно, зміна заряду краплі є

$$\Delta q = \frac{6\pi\eta a}{E} \Delta v_E,$$

де Δv_E – зміна швидкості краплі в полі конденсатору.

Спостерігаючи за рухом крапель в незарядженому конденсаторі, а потім в полі E при дії рентгенівських променів, можна було знайти заряд крапель $q_1, q_2, q_3, \dots$ та зміни цього заряду $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3, \dots$. Далі підбирався загальний найбільший дільник для цих величин, який є зарядом електрона e_0 . За сучасними даними

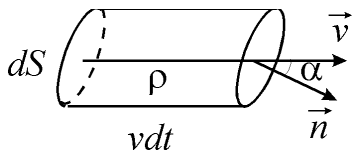
$$e_0 = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Сила та густина струму

Для кількісної характеристики струму вводять дві величини: векторну, диференціальну – вектор густини струму $\vec{j}$, та скалярну, інтегральну – силу струму I .

Густина струму дорівнює величині заряду, який проходить за одиницю часу через одиничну поверхню, перпендикулярну до ліній струму.

Виберемо у просторі деяку поверхню dS , $\vec{n}$ – орт нормалі до цієї поверхні. Побудуємо на цій поверхні циліндр, твірна якого співпадає за напрямком із напрямком швидкості руху заряду, а довжина твірної дорівнює vdt , де v – швидкість руху заряду в заданій точці, dt – малий проміжок часу. Тобто фактично ми побудували трубку струму.



Тоді за час dt через площадку dS пройде весь заряд, який міститься в об'ємі циліндру

$$d\tau = vdt dS \cdot \cos\alpha = (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS dt.$$

Якщо густина заряду ρ , то заряд, що містився у виділеному циліндрі

$$dq = \rho d\tau = \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS dt.$$

Але за визначенням густини струму

$$j = \frac{dq}{dS_n dt} = \frac{dq}{dS dt \cos\alpha},$$

тому що $dS_n = dS \cos\alpha$ – проекція на площину, нормальну до площі dS , отже

$$dq = j dS dt \cos\alpha = (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS dt.$$

Порівнюючи співвідношення, одержимо

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \quad \rho = eN,$$

де e – заряд носія струму, N – концентрація носіїв. Остаточно маємо вираз для густини струму

$$\boxed{\vec{j} = eN\vec{v}}.$$

Тепер звернемось до другої характеристики струму.

Повна кількість заряду, який проходить через деяку поверхню S за одиницю часу, називається силою струму I .

Якщо dq – заряд, що пройшов через переріз провідника за час dt , то $I = \frac{dq}{dt}$. Обидві величини є скалярами. Отже сила струму є також скаляром. Знаючи вектор густини струму $\vec{j}$ в кожній точці провідника, можна подати через нього і величину струму

$$\boxed{I = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS}.$$

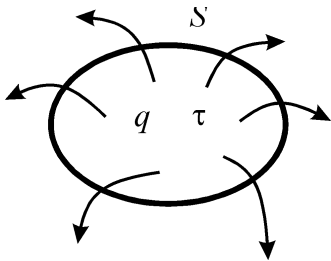
З математичної точки зору сила струму I є потік вектора густини струму $\vec{j}$ через поверхню.

В системі CGSE розмірності $[j]$ та $[I]$ не мають спеціальної назви. В системі СІ сила струму вимірюється в амперах, визначення амперу $1A = \frac{1K\lambda}{1c}$ проводиться через магнітну взаємодію струмів. $1A = 3 \cdot 10^9$ одиниць сили струму CGSE. Густина струму вимірюється в A/m^2 .

Рівняння неперервності та умови стаціонарності струму

Подібно до того, як в електростатиці ми розглядали потік вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ через замкнуту поверхню, розглянемо питання про силу струму I , або про потік вектора густини струму $\vec{j}$ через замкнуту поверхню. При цьому треба враховувати, що експериментально не було виявлено таких процесів, при яких би електричний заряд виникав або зникав. Навіть якщо ці заряди виникають або зникають, то тільки парами, в склад яких входить позитивний та рівний йому негативний заряд (наприклад, електрон і позитрон). Тому один із основних фізичних законів – **закон збереження заряду** – говорить : **електричний заряд не зникає і не виникає, повна величина заряду зберігається**. Іноді цей закон формулюють так: **заряд Всесвіту незмінний**. Закон збереження заряду не означає, однак, що заряд всередині деякої замкненої поверхні не змінюється. Але єдиною причиною цього може бути прихід або вихід заряду через замкнену поверхню, тобто струм.

Візьмемо деяку замкнуту поверхню S . Нехай заряд всередині цієї поверхні становить q . Цей заряд може змінюватись в часі $\left(\frac{dq}{dt} \neq 0\right)$, але тільки завдяки струмові



I через поверхню. Зазвичай $\frac{dq}{dt} = -I$. Знак $(-)$ в цьому співвідношенні пов'язаний з тим, що коли заряд q в охопленому об'ємі з часом зменшується, виходячи через поверхню назовні, то вектор густини струму $\vec{j}$ направлений вздовж зовнішньої нормалі $\vec{n}$. Тобто, напрямки струму і напрямку руху електронів – протилежні. Тоді

$$I = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS > 0,$$

а отже вираз

$$\boxed{\frac{dq}{dt} = -I}$$

можна розглядати як **кількісне інтегральне формулювання закону збереження заряду**.

Якщо заряд розповсюджений по об'єму, то закон збереження заряду можна записати як

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = - \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS.$$

Якщо об'єм не змінюється в часі, можна знак похідної внести під знак інтегралу і замінити її частинною похідною по часу (частинною тому, що величина змінюється за кількома змінними)

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS.$$

Скористаємось формулою Остроградського і замінимо інтеграл по поверхні інтегралом по об'єму

$$\int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\tau} \operatorname{div} \vec{j} d\tau.$$

Якщо рівність інтегралів

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_{\tau} \operatorname{div} \vec{j} d\tau$$

не змінюється при зміні меж інтегрування, то рівними є підінтегральні вирази

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad \text{або} \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}.$$

Ми отримали диференціальну форму запису закону збереження заряду, або так зване рівняння неперервності (уравнение непрерывности).

В цьому розділі ми будемо розглядати постійний електричний струм, тобто струм, який не залежить від часу. Зокрема це означає, що густина заряду ρ – стала у часі величина, і $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Тоді із закону збереження заряду випливає

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} = 0}$$

формулювання закону збереження заряду в диференціальній формі для постійного струму. Це рівняння є найбільш загальним виразом того факту, що постійний струм не має джерел і стоків, тобто лінії струму завжди замкнуті або йдуть на нескінченність (порівняйте із силовими лініями електростатичного поля : вони завжди починаються і закінчуються на зарядах).

Оскільки $q = \int_{\tau} \rho d\tau$, то і заряд не залежить від часу. Звідси маємо

$$\boxed{I = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS = 0}$$

– закон збереження заряду в інтегральній формі для постійного струму. Тобто потік вектора густини струму через замкнуту поверхню дорівнює нулю, а це, з іншого боку, означає : скільки струму втікає у виділений об'єм, стільки й витікає.

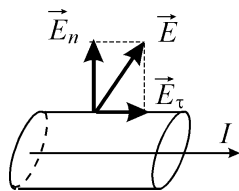
Електричне поле в умовах протікання струму

Рух зарядів у провідниках відбувається під впливом сили, яка діє на ці заряди. Таким чином, існує електричне поле, в нашому випадку це так зване поле постійних струмів $\vec{E}$. В полі постійних струмів густина зарядів не залежить від часу, хоча може змінюватись у просторі. Це поле є тотожним (якщо не враховувати магнітні сили) до поля нерухомих зарядів, які розподілені і закріплені у просторі за тим же законом, що і у випадку поля постійного струму. Та обставина, що для випадку постійного струму в заданій точці простору одні заряди замінюються на інші, рівні їм, не відіграє значної

ролі. Отже, стаціонарне поле постійного струму, подібне до електростатичного поля, є потенціальним, і для нього виконуються співвідношення

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0; \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi; \quad \text{rot } \vec{E} = 0.$$

Є, однак різниця в цих полях. Для електростатичного поля поверхня будь-якого провідника є екіпотенціальною, вектор $\vec{E}$ направлений вздовж нормалі до поверхні провідника, на якій має місце поверхнева густина зарядів $\sigma = \frac{E}{4\pi}$ (згадайте поле у пласкому конденсаторі).



Експеримент свідчить, що у випадку постійного струму поверхня провідника не є екіпотенціальною, якщо вздовж провідника тече струм. Наявність різниці потенціалів вздовж поверхні означає наявність поля вздовж поверхні ($E = -\text{grad } \varphi$). Тому, на відміну від електростатики, вектор $\vec{E}$ для постійного струму нахилений по відношенню до нормалі і має як нормальну E_n , так і тангенціальну складову E_τ .

Всередині провідника нормальна складова поля дорівнює нулю, оскільки завдяки поверхні рух зарядів у провіднику в цьому напрямку неможливий (згадайте, лінії струму мають бути замкнутими). На поверхні міститься заряд, поверхнева густина якого $\sigma = \frac{E_n}{4\pi}$. Ці поверхневі заряди змінюються вздовж поверхні (оскільки існує різниця потенціалів вздовж провідника), створюючи тангенціальну складову E_τ в просторі над провідником. Але з умови неперервності тангенціальної складової електричного поля $E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$, всередині провідника виникає електричне поле E_τ , яке приводить заряди в рух, створюючи струм.

Для підтримання постійного струму, тобто руху електронів із сталою швидкістю, потрібна неперервна дія сили, яка дорівнює eE_τ (e – заряд електрона). А це означає, що електрони у провідниках рухаються із тертям (точніше, аналогом механічного тертя, або якого ми враховували при створенні поляризації). Інакше кажучи, провідники мають електричний опір.

І це приводить нас до наступного розділу

Закон Ома

Якщо стан провідника не змінюється (тобто не змінюється температура, тиск, тощо), то для кожного провідника існує однозначна залежність між напругою U , що прикладена до кінців провідника, і величиною струму I , що протікає у ньому – вольт-амперна характеристика (ВАХ) провідника

$$I = f(U).$$

Для широкого класу провідників ця залежність лінійна, величина струму прямо пропорційна прикладеній напрузі

$$I = \Sigma U$$

де коефіцієнт пропорційності Σ називають електропровідністю (провідністю) провідника, а обернену до нього величину $R = \frac{1}{\Sigma}$ – електричним опором.

В системі СІ одиницею опору є Ом.

1 Ом – це опір такого провідника, в якому при силі струму 1 А падіння напруги на його кінцях дорівнює 1 В.

В системі CGSE одиниця опору назви не має, і пов'язана із системою СІ як

$$1\text{Ом} = \frac{1\text{В}}{1\text{А}} = \frac{1/300}{3 \cdot 10^9} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ одиниць опору CGSE}.$$

Одиницею електропровідності в системі СІ є сименс, або за кордоном – мО :

$$1 \text{ сименс} = 1 \text{ мО} = (1 \text{ Ом})^{-1}.$$

Отриманий лінійний зв'язок між струмом і напругою називається законом Ома, а провідники, що підпорядковуються цьому закону – омічними. Ще раз звертаю увагу, що закон Ома справедливий лише для ділянки ланцюга, по якій протікає струм і до якої прикладена напруга, але не для розгалуженого кола.

Для однорідних омічних провідників з постійним перерізом S і довжиною l маємо

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ – питомий опір, тобто опір провідника одиничної довжини і одиничної площі перерізу (тобто довжиною 1м і перерізом 1м^2 в системі СІ, що є кубом з ребром 1м із заданої речовини). Питомий опір є властивістю конкретної речовини, у кожного матеріалу свій питомий опір.

Аналогічно існує і питома провідність $\sigma = \frac{1}{\rho}$.

Розмірністю в системі СІ питомого опору є $[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$, а питомої провідності – $[\sigma] = \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, хоч на практиці частіше зустрічаються відповідно $\text{Ом} \cdot \text{см}$ та $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$.

Залежність питомого опору від температури

Питомий опір ρ залежить не тільки від роду речовини. Експерименти показали, що питомий опір залежить і від температури. Для металів із зростанням температури ρ зростає, для напівпровідників – зменшується. Причини такої поведінки питомого опору будемо з'ясовувати пізніше.

Залежність питомого опору від температури характеризують температурним коефіцієнтом опору даної речовини

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dT},$$

який являє собою відносну зміну питомого опору при зміні температури на 1 градус.

У загальному випадку температурний коефіцієнт опору залежить від температури. Однак для великого класу провідників, до якого належать всі метали, зміна α з температурою не дуже велика.

Якщо температурний коефіцієнт опору майже сталий, можна визначити за ним опір провідника при різних температурах. Виведемо цю формулу, звернувши увагу на ті допущення, при яких вона справедлива.

Припустимо, що температурний коефіцієнт опору не залежить від температури

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dT} = \text{const.}$$

Тоді, проінтегрувавши рівняння

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \cdot dT,$$

одержимо

$$\ln \rho = \alpha \cdot T + C.$$

Нехай при температурі плавлення льоду ($T = 273\text{K}$) питомий опір $\rho = \rho_0$, тоді

$$\ln \rho_0 = \alpha \cdot 273 + C,$$

звідки

$$C = \ln \rho_0 - \alpha \cdot 273.$$

Тоді температурна залежність питомого опору набуває вигляду

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \alpha \cdot (T - 273) = \alpha \cdot t,$$

де t – температура за шкалою Цельсія.

Якщо припустити, що температурний інтервал настільки малий, що $\rho - \rho_0 \ll \rho_0$, то можна записати

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 + 1 \right) = \ln \left(1 + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \approx \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}.$$

Тоді

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \alpha \cdot t,$$

і остаточно

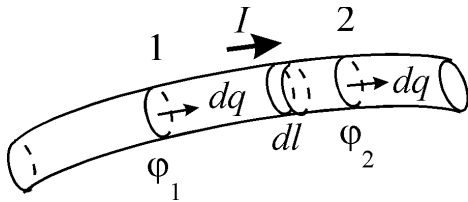
$$\boxed{\rho = \rho_0(1 + \alpha \cdot t)}.$$

Залежність опору провідників від температури використовують у різних вимірювальних приладах. Найважливішим є термометр опору (термометр сопроотивления). Він являє собою опір із платинової дротини, який вмикають у одне з плечей мостової схеми. Опір платини добре вивчений у широкому інтервалі температур і дуже сталий у часі. Тому, вимірюючи опір платинової дротини, можна дуже точно виміряти і температуру. Термометри опору мають і ту перевагу перед

рідинними термометрами, що можуть працювати і при дуже високих, і при дуже низьких температурах, при яких рідинні термометри працювати не можуть.

Закон Джоуля-Ленца

З протіканням струму у провіднику нероздільно пов'язане виділення тепла (тобто нагрівання провідника) – це відомо вам зі школи.



Кількість теплоти Q , що виділяється струмом за одиницю часу на виділеній ділянці провідника, може бути визначена наступним чином.

Виділимо у провіднику ділянку між точками 1 і 2. Якщо сила струму у провіднику становить I , то через будь-який переріз провідника протікає $dq = Idt$

одиниць заряду. Тобто, якщо через переріз 1 пройде кількість заряду dq , то й через переріз 2 – теж dq . Оскільки розподіл зарядів у провіднику при цьому залишається сталим (ми розглядаємо постійний струм), то процес протікання струму еквівалентний переносу заряду від перерізу 1 до перерізу 2.

Робота електричних сил, що виконується при протіканні струму, дорівнює

$$A = dq \int_1^2 E_l dl,$$

де E_l – проекція вектора напруженості електричного поля на вектор зміщення $d\vec{l}$, перпендикулярний перерізу провідника в заданій точці. Скориставшись виразом $dq = Idt$, перепишемо роботу у вигляді

$$A = Idt \int_1^2 E_l dl = Idt U_{12} = Idt(\varphi_1 - \varphi_2),$$

скориставшись означенням напруги (або різниці потенціалів).

Згідно закону збереження енергії, еквівалентна цій роботі кількість енергії повинна виділитись у вигляді іншої форми енергії, наприклад, у вигляді теплоти (хоч $\delta A = dU + \delta Q$, зміною внутрішньої енергії нехтуємо). Отже, за час dt виділиться кількість теплоти

$$Qdt = Idt \int_1^2 E_l dl = Idt U_{12} = Idt(\varphi_1 - \varphi_2),$$

звідки

$$Q = I \int_1^2 E_l dl = IU_{12} = I(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Отримана формула виражає собою **закон Джоуля-Ленца**. Він означає, що якщо провідник не рухається, і в ньому не відбуваються хімічні реакції (як в електролітах), то струм виділяє енергію у вигляді тепла.

Скориставшись законом Ома, вираз для кількості теплоти можна записати у вигляді

$$Q = IU = \frac{U^2}{R} = I^2 R.$$

Введена таким чином кількість теплоти дорівнює кількості енергії, що виділяється за одиницю часу, і має назву **Ватт**. Її розмірність в системі СІ

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А} = 1/300 \text{ од. напруги CGSE} \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ од. напруги CGSE} = 10^7 \text{ ерг/с}.$$

Диференціальне формулювання закону Ома

Тепер повернемося знову до закону Ома $I = \frac{U}{R}$ і виразу для опору провідника, який ми записали у вигляді

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

приказуючи, що наведена формула справедлива для однорідних провідників ($\rho = \text{const}$), у яких переріз всюди один і той же ($S = \text{const}$). Ця формула є інтегральною. На практиці треба мати справу з провідниками довільної форми і з розподіленням питомим опором, отже для розв'язку задач, в яких можуть змінюватись і ρ , і S вздовж провідника, треба перейти до диференціальних співвідношень.

Для цього візьмемо трубку струму нескінченно малої довжини dl і нескінченно малого перерізу dS , в межах якої питомий опір залишається сталим. По трубці тече струм dI , падіння напруги на трубці dU , при цьому струм протікає від точок з більшим потенціалом до точок з меншим потенціалом, тому $dU < 0$, опір трубки

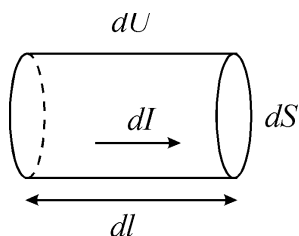
$$dR = \rho \frac{dl}{dS}.$$

Тоді за законом Ома для трубки

$$dI = \frac{dU}{dR} = \frac{dU}{\rho \frac{dl}{dS}}.$$

Скористаємось тим, що $dU < 0$, тоді

$$dI = -\frac{|dU|}{\rho \frac{dl}{dS}} = -\frac{|dU|}{dl} \cdot \frac{dS}{\rho}.$$



Але $\frac{|dU|}{dl}$ — не що інше, як градієнт потенціалу вздовж

трубки, тоді $\vec{E} = -\frac{dU}{dl}$, де $\vec{E}$ – поле в провіднику в точці, де знаходиться трубка (воно є векторною величиною, оскільки градієнт – вектор).

За означенням $\frac{dI}{dS} = j$ – густина струму, тому

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}.$$

Скориставшись тим, що $\frac{1}{\rho} = \sigma$ – питома провідність, запишемо остаточно

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

закон Ома в диференціальному вигляді. Це рівняння, що встановлює зв'язок між густиною струму у провіднику і напруженістю електричного поля в ньому, являє собою найбільш загальне і просте формулювання закону Ома. Воно має назву диференціального, хоч і не містить похідних, оскільки встановлює зв'язок між величинами, що відносяться до однієї конкретної точки провідника. Величини $\vec{j}, \sigma, \vec{E}$, що визначені в кожній точці, можуть змінюватись від точки до точки, при цьому рівність $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ зберігається. В ізотропних середовищах σ є скаляром, в анізотропних середовищах – тензором.

Приклади на визначення опору

Одержаний диференціальний вираз $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ дозволяє вирішувати задачі по знаходженню опору у випадках, коли формула $R = \rho \frac{l}{S}$ не застосовна.

Сферичний конденсатор з провідністю речовини, що його заповнює.

Нехай є сферичний конденсатор з радіусами сфер a і $b > a$. Конденсатор заповнений речовиною з $\varepsilon = 1$ і питомим опором ρ , що не залежить від координат ($\rho = \text{const}$). На самостійне опрацювання вам виносилось знайти хід потенціалу в такому конденсаторі

$$\varphi = U \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}},$$

де $a \leq r \leq b$, внутрішня сфера заземлена, на зовнішню відносно внутрішньої подається потенціал $+U$. Струм тече від зовнішньої сфери до внутрішньої. Поле всередині конденсатору

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} = -U \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \cdot \frac{1}{r^2},$$

густина струму

$$j = \frac{1}{\rho} E = -\frac{U}{\rho} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Знак $(-)$ показує, що струм тече в сторону зменшення r . Враховуючи це і цікавлячись тільки абсолютним значенням величини j , можемо цей знак випустити

$$I = jS = \frac{U}{\rho} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \cdot \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{\rho} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} U = \frac{U}{R}.$$

Звідси

$$\boxed{R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}. \quad \text{в системі CGSE}$$

Цей результат отриманий в системі CGSE. В системі СІ

$$\boxed{R = \varepsilon_0 \rho \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}. \quad \text{в системі СІ}$$

Циліндричний конденсатор.

Позначимо радіус внутрішнього електроду a , радіус зовнішнього електроду b , внутрішній електрод заземлений, зовнішній електрод має потенціал $+U$. Розподіл потенціалу у циліндричному конденсаторі має вигляд

$$\varphi = U \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Тоді поле у конденсаторі

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{U}{r} \cdot \frac{1}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Густина струму

$$j = \frac{1}{\rho} E = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{r} \cdot \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Відкинемо знак “мінус”, і запишемо повний струм як $I = 2\pi l j$, де l – довжина конденсатору. Підставивши значення густини струму у рівняння для струму, отримаємо опір

$$\boxed{R = \frac{\rho l \ln \frac{b}{a}}{2\pi l}}. \quad \text{в системі CGSE}$$

$$R = \frac{2\varepsilon_0 \rho l \ln \frac{b}{a}}{l} \quad \text{в системі СІ}$$

Дві провідні сфери у слабо провідному середовищі.

Дві провідні сфери радіусом a знаходяться на відстані $l \gg a$ одна від одної в слабо провідному середовищі з питомим опором ρ . Ця задача моделює заземлення у лініях зв'язку, тобто заземлення одного з полюсів джерела струму і одного з вхідних проводів приймача.

Візьмемо сферичний конденсатор, для якого

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

і спрямуємо b до ∞ . Тоді

$$R_a = \frac{\rho}{4\pi a},$$

і опір визначається тільки радіусом a . Для двох сфер

$$R = 2R_a = \frac{\rho}{2\pi a} \quad \text{в системі CGSE,}$$

$$R = 2R_a = \frac{2\varepsilon_0 \rho}{a} \quad \text{в системі СІ,}$$

і не залежить від відстані між сферами при $l \gg a$.

Електролітична ванна

Поле $\vec{E}$, яке входить в закон Ома, є полем постійного струму в провіднику. Візьмемо дивергенцію від лівої і правої частин закону Ома у диференціальному вигляді

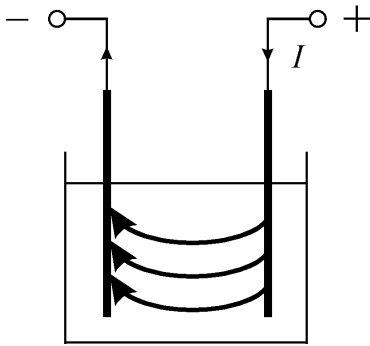
$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = \sigma \operatorname{div} \vec{E} + E \operatorname{grad} \sigma.$$

Але для постійного струму $\operatorname{div} \vec{j} = 0$. Якщо середовище однорідне, то і $\operatorname{grad} \sigma = 0$, і тоді

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

Це рівняння з вигляду співпадає з рівнянням Максвелла для електростатичної системи без об'ємного заряду. Однак, як ми розглянули вище, крайові умови для цих двох полів різні. В електростатиці провідник – еквіпотенціальна область, вектор напруженості електростатичного поля біля поверхні провідника направлений вздовж нормалі до поверхні. Для поля постійного струму є падіння напруги вздовж провідника зі струмом, і напрямок вектору $\vec{E}$ не співпадає з нормаллю до поверхні. Різниця в крайових умовах приводить до різниці у розв'язках тотожних рівнянь.



Так, якщо два електроди занурити у провідне середовище, то лінії струму і силові лінії вектора $\vec{E}$, які співпадають один з одним, нахилені до поверхні електродів.

Але, якщо ми підберемо питомі опори електродів $\rho_{ел}$ і середовища $\rho_{сер}$ так, що $\rho_{ел} \ll \rho_{сер}$, то на електродах падіння напруги буде значно меншим, ніж у середовищі (наприклад, мікрівольти вздовж електродів і вольти в середовищі між ними). В результаті вектор $\vec{E}$ біля поверхні електродів буде направлений практично вздовж нормалі. Це означає, що поле в провідному середовищі співпадатиме з електростатичним полем між тими ж електродами у вакуумі.

На цьому принципі заснований метод електролітичної ванни, який використовується для знаходження розподілу потенціалів і полів у складних вакуумних приладах (де об'ємним зарядом можна знехтувати). За звичай, вирішення рівняння Лапласа $\Delta\varphi = 0$ для таких систем дуже складне, простіше знайти розподіл потенціалу експериментально.

Для цього модель приладу занурюють у слабо провідне середовище (електроліт), подають потенціали на всі електроди, а потім вводять в систему невелике провідне тіло – зонд, на який ми можемо подавати потенціал, що змінюється, і вимірювати струм у колі зонду. Якщо зонд знаходиться в точці між електродами, в якій потенціал простору і потенціал зонду рівні, то струм у колі зонду дорівнює нулю. Таким чином, можна одержати картину розподілу потенціалу в моделі приладу. Цей розподіл у полі постійного струму провідності співпадає з розподілом потенціалу у вакуумному приладі.

Диференціальне формулювання закону Джоуля-Ленца

Як і для закону Ома, візьмемо трубку струму силою dI довжиною dl з площею перерізу dS і падінням напруги dU . Тоді

$$dQ = dI \cdot dU = j dS \cdot E dl.$$

Знаки ми врахували, знаючи, що $E = -\frac{dU}{dl}$ і що $dU < 0$. Тоді

$$dQ = jE \cdot \underbrace{dS dl}_{d\tau} = jE d\tau,$$

де $d\tau$ – об'єм трубки.

Введемо диференціальну величину

$$q = \frac{dQ}{d\tau},$$

що дорівнює кількості тепла, яка виділяється за 1 секунду в одиниці об'єму. В загальному випадку та для анізотропних речовин, коли σ – тензор, і вектор $\vec{j}$ не паралельний вектору $\vec{E}$, маємо

$$q = (\vec{j} \cdot \vec{E}).$$

Для ізотропного середовища

$$q = jE = \sigma E^2 = \frac{E^2}{\rho} = j^2 \rho = \frac{j^2}{\sigma}$$

закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі. Як і для закону Ома, ці диференціальні співвідношення можна використати, коли $\vec{E}, \sigma, \vec{j}$ змінюються від точки до точки.

Сторонні е.р.с.

Давайте порівняємо процеси створення електростатичного поля і протікання струму. Електростатичне поле вимагає втрати енергії тільки при його створенні. Протікання постійного струму супроводжується неперервним виділенням тепла Джоуля-Ленца і, відповідно, неперервним втратам енергії. Ці втрати повинні неперервно ж відшкодовуватись за рахунок інших видів енергії – механічної (динамо-машина), хімічної (гальванічні елементи, акумулятори), теплової (термоелементи), тощо. Це означає, що в колі постійного струму повинні існувати джерела енергії, які використовують некулонівські, так звані **сторонні сили**.

Наявність сторонніх сил означає, що у всьому колі постійного струму, або в якійсь його частині, на носій струму, крім кулонівського поля $\vec{E}$, повинні діяти сторонні сили $\vec{F}^*$. Поділивши ці сили на заряд носія струму e , отримаємо напруженість поля сторонніх сил

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{e}.$$

З урахуванням поля сторонніх сил, закон Ома ми повинні записати у вигляді

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

При цьому поле сторонніх сил $\vec{E}^*$ може існувати як у всьому колі, так і на будь-якій його ділянці.

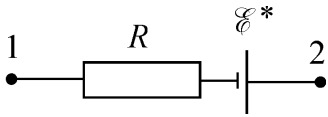
Свого часу ми вводили різницю потенціалів двох точок 1 і 2 як роботу кулонівського поля по переміщенню одиничного позитивного точкового заряду з точки 1 до точки 2

$$U_{12} = \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}).$$

Аналогічно введемо роботу сторонніх сил по переміщенню заряду з точки 1 в точку 2

$$E_{12} = \int_1^2 (\vec{E}^* \cdot d\vec{l}).$$

і назвемо цю величину **електрорушійною силою** (е.р.с.).



Візьмемо тепер яку-небудь ділянку кола постійного струму від точки 1 до точки 2. На цій ділянці можуть діяти е.р.с., а еквівалентний опір ділянки R (опір всього, що на ній є). Запишемо закон Ома для цієї ділянки

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

Помножимо скалярно на $d\vec{l}$

$$\vec{j} \cdot d\vec{l} = \sigma(\vec{E} \cdot d\vec{l} + \vec{E}^* \cdot d\vec{l}),$$

поділимо на σ

$$\frac{(\vec{j} \cdot d\vec{l})}{\sigma} = (\vec{E} \cdot d\vec{l}) + (\vec{E}^* \cdot d\vec{l})$$

і проінтегруємо від 1 до 2

$$\int_1^2 \frac{(\vec{j} \cdot d\vec{l})}{\sigma} = \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}) + \int_1^2 (\vec{E}^* \cdot d\vec{l}).$$

За означеннями

$$\int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = U_{12}; \quad \int_1^2 (\vec{E}^* \cdot d\vec{l}) = \mathcal{E}_{12}^*.$$

в лівій частині помножимо чисельник і знаменник під знаком інтегралу на площу перерізу S_n , яка нормальна до вектора $\vec{j}$. Тоді, оскільки на малій ділянці кола $\vec{j} \uparrow \uparrow d\vec{l}$,

$$\frac{(\vec{j} \cdot d\vec{l}) S_n}{S_n \sigma} = \frac{\rho I dl}{S_n} = I \cdot dR,$$

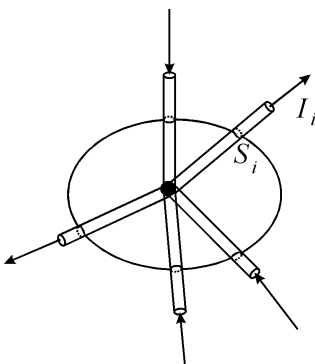
де dR – опір ділянки довжиною dl . При цьому ρ і S_n можуть змінюватись вздовж кола, але $I = \text{const}$ (нагадує, що ми розглядаємо постійний струм). В результаті маємо

$$I \int_1^2 dR = U_{12} + \mathcal{E}_{12}^*,$$

звідки

$$I \cdot R_{12} = U_{12} + \mathcal{E}_{12}^*$$

маємо **закон Ома для ділянки кола з урахуванням е.р.с.** Отже, добуток сили струму на опір довільної ділянки провідника дорівнює сумі падіння напруги та сторонньої е.р.с., прикладених до цієї ділянки.



Правила Кірхгофа

Все, що ми розглядали до сих пір, стосувалось окремої лінійної ділянки провідника. На практиці найчастіше мають справу із певними розгалуженнями провідників.

Нехай є деякий вузол, в якому сходяться декілька провідників. Оточимо цей вузол замкнутою поверхнею і знайдемо силу струму через неї

$$I = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS.$$

Інтегрування треба проводити тільки по тим частинам поверхні, які перетинають провідники, а на інших частинах $\vec{j} = 0$, тобто

$$\int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS = \sum_i \int_{S_i} (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS$$

Але $\int_{S_i} (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS = I_i$ – сила струму в i –провіднику. Із закону

збереження заряду в інтегральній формі для постійного струму маємо

$$I = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS = 0.$$

В результаті отримаємо **перше правило Кірхгофа**

$$I = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS = \sum_i I_i = 0,$$

тобто алгебраїчна сума всіх струмів у вузлі дорівнює нулю.

Тепер візьмемо коло, яке складається з ряду вузлів, декількох джерел е.р.с., тощо. Виділимо замкнутий контур в цьому колі. Цей контур складається, наприклад, з n ділянок, таких, як на рисунку.

Для i –ділянки вибраного нами кола скористаємось законом Ома для кола, що містить джерело е.р.с.

$$I \cdot R_i = U_i + \mathcal{E}_i^*.$$

Тоді, додаючи рівняння для всіх ланцюгів обраного нами контуру, маємо

$$\sum_i I \cdot R_i = \sum_i U_i + \sum_i \mathcal{E}_i^*.$$

Але циркуляція вектору напруженості електричного поля $\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0$, тому

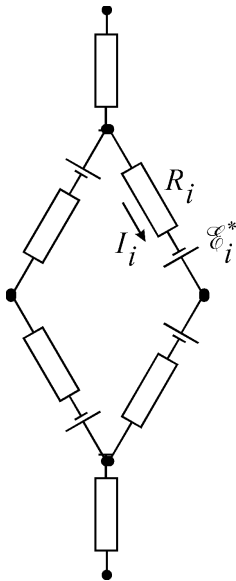
$\sum_i U_i = 0$. Звідси отримуємо **друге правило Кірхгофа**

$$\sum_i I \cdot R_i = \sum_i \mathcal{E}_i^*,$$

тобто для будь-якого замкнутого контуру сума всіх падінь напруги дорівнює сумі всіх електрорушійних сил у цьому контурі.

Разом з першим правилом $\sum_i I_i = 0$ для кожного вузла, можемо одержати,

вибираючи декілька замкнутих контурів, систему рівнянь, яка достатня для розрахунку складного кола (наприклад, для знаходження всіх струмів). Можна показати (але ми цього не будемо робити), що число незалежних рівнянь, які ми можемо записати при



цьому, завжди дорівнює числу невідомих струмів, і тому обидва правила Кірхгофа дають загальний метод для розв'язування задач на розгалужені кола. При цьому напрямки струмів, що протікають, нам заздалегідь невідомі, тому ми їх вибираємо довільно. Якщо після розв'язку системи деякий струм одержуємо зі знаком (+), то ми вірно вгадали його напрям. Якщо ж рішення одержуємо зі знаком (–), то треба змінити вибраний спочатку напрям.